SERIE SIMILITUDE

EXERCICE N° 1 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que :

$$AB = AC \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}.$$

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}$.

Pour la figure, que l'on complétera en traitant les questions, on prendra AB = 5 cm.

1. On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $f = r_C \circ r_A$.

a) Déterminer les images par f de A et de B.

b) Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer O sur la figure.

c) Quelle est la nature du quadrilatère ABOC ?

2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' l'image de C par s, H le milieu du segment [BC] et H' son image par s.

a) Donner une mesure de l'angle de s. Montrer que C' appartient à la droite (OA).

b) Donner l'image par s du segment [OA] et montrer que H' est le milieu de [OB].

c) Montrer que (C'H') est perpendiculaire à (OB).

En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

EXERCICE N° 2 :

Dans le plan orienté, on considère la figure ci-après.

ABCD est un carré de centre O et tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$.

Les points M, N, P et Q sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

Le but de l'exercice est de prouver que le quadrilatère EFGH est un carré, puis de comparer son aire à celle du carré ABCD.

Dans chacune des questions, on énoncera avec précision les propriétés utilisées.

1. On se propose de démontrer que EFGH est un carré.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer l'image par r du point N, puis celle du segment [AN]. Déterminer l'image par r du point P, puis celle du segment [BP]. En déduire r(F) et la nature du triangle FOG.

b) Expliquer alors comment terminer la démonstration demandée.

2. Comparaison des aires des carrés ABCD et EFGH

a) Justifier les égalités AE = EH = DH et AE = 2QH.

b) Soit K l'image de H par la symétrie s de centre Q. Démontrer que AEHK est un carré et comparer son aire à celle du triangle AED.

c) En déduire le rapport entre les aires des carrés ABCD et EFGH.

3. Généralisation de la question 1.

On suppose maintenant que les points M', N', P' et Q' vérifient respectivement les égalités :

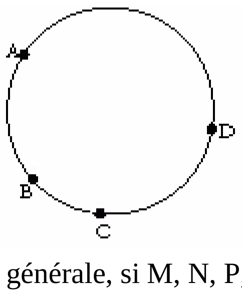
$\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DQ'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

On construit le quadrilatère E'F'G'H' en traçant les droites (AN'), (BP'), (CQ') et (DM').

Que suffit-il de changer à la démonstration du 1. Pour démontrer que E'F'G'H' est un carré ?

EXERCICE N° 3 :

Dans le plan orienté, on considère quatre points distincts A, B, C et D se succédant dans le sens trigonométrique sur un même cercle.



D'une manière générale, si M, N, P, Q sont quatre points tels que M ≠ N et P ≠ Q, $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$ désigne une mesure en radians de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$.

1. Soit S la similitude plane directe de centre A qui transforme C en D. On désigne par E l'image du point B.
a) Montrer que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ (modulo 2π).
b) Montrer que E est sur la droite (BD). Marquer le point E sur la figure.
On admettra que E est sur le segment [BD].
c) Montrer que AD × BC = DE × AC.
2. a) Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ (modulo 2π) puis que $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$.
b) Soit S´ la similitude directe de centre A qui transforme B en C. Montrer que D est l'image de E par cette similitude.
c) Prouver que AB × CD = AC × BE.
3. Utiliser ce qui précède pour démontrer la relation : AC × BD = AB × CD + AD × BC.
Remarque : Cette relation est connue sous le nom de théorème de Ptolémée. Ptolémée était un mathématicien et astronome grec du IIe siècle après J.-C. ; il utilisait cette relation pour calculer les longueurs des cordes d'arc de cercle, ancêtres de nos rapports trigonométriques.

<u>EXERCICE N° 4 :</u>

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Cet exercice propose l'étude de l'ensemble (C) des points M du plan dont les affixes vérifient :

$$|(1 + i)z - 3 + 3i|^2 + |z - 6|^2 = 54.$$

1. Première méthode
a) En posant z = x + iy, donner une équation cartésienne de (C).
b) En déduire la nature de (C).
c) Construire (C).

2. Deuxième méthode
On désigne par s la similitude qui, au point M d'affixe z, associe le point $M_1 = s(M)$ d'affixe $z_1 = (1 + i) z - 3 + 3i$ et on désigne par t la translation qui, au point M d'affixe z, associe le point $M_2 = t(M)$ d'affixe $z_2 = z - 6$.
a) Caractériser géométriquement ces deux transformations.
b) Déterminer les antécédents respectifs S et T de O par s et t.
c) Calculer le rapport $\frac{SM}{OM_1}$ puis le rapport $\frac{TM}{OM_2}$.
d) En déduire que (C) est la ligne de niveau définie par : $2\,SM^2 + TM^2 = 54$.
e) Calculer l'affixe du barycentre G du système {(S, 2), (T, 1)}.
f) Montrer que l'ensemble (C) est défini par $MG^2 = 8$.
g) En déduire la nature et les éléments qui déterminent (C).

<u>EXERCICE N° 5 :</u>

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

On désigne par :

r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$;r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$;
et par D et E les points tels que : $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$.
1. Démontrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ est la symétrie centrale de centre B.
Préciser alors la position du point E.
2. On admet qu'il existe une seule similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$ qui transforme A en B.

On nomme S cette similitude.
Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$.
En déduire que S(E) = D.
3. Soit Ω le centre de la similitude S.
Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE. Construire Ω.
4. a) Démontrer que S transforme la droite (AC) en (CB).
b) Démontrer que l'image par S du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD].
En déduire que l'image de C par la similitude S est le point I, milieu du segment [DE].

<u>EXERCICE N° 6 :</u>

Le plan complexe P est muni du repère ortho normal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On fera une figure, à compléter au fur et à mesure des questions. On prendra 1 cm pour unité de longueur.

On considère le point J de coordonnées $(2\sqrt{3};6)$ et le cercle (C) de diamètre [OJ]. On note I son centre. Les points A, de coordonnées $(2\sqrt{3};0)$, et B, de coordonnées (0 ; 6), sont les projetés orthogonaux de J, respectivement sur les axes $(O;\vec{u})$ et $(O;\vec{v})$. On remarquera que le cercle C est circonscrit au rectangle OAJB.

1. Soit S la similitude directe de centre O transformant B en A .
a) Déterminer l'angle et le rapport de cette similitude.
b) Déterminer les images I', J', A' des points I, J et A par la similitude S.
c) Soit M un point quelconque du cercle (C), et M' son image par la similitude S. Quel est l'ensemble (C') décrit par M' lorsque M décrit C ? Représenter C' . Puis démontrer que, quel que soit le point M du cercle C, les points M, A et M' sont alignés.

2. Soit Ω le point de coordonnées $(4+2\sqrt{3};2)$.

On considère la rotation R de centre Ω et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que J est l'image de J' par R.
b) Pour tout point M du plan P, on note M' son image par S et M'' l'image de M' par R. Déterminer l'image de J par la transformation R o S (composée de R et de S), puis une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{JM},\overrightarrow{JM''})$ où M est distinct de J.

c) Montrer que $JM''=\frac{\sqrt{3}}{3}JM$.

En déduire une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{JM''}$, et conclure quant à la nature de la transformation R o S.

<u>EXERCICE N° 7 :</u>

Dans le plan complexe P rapporté au repère ortho normal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) d'unité graphique 5 cm, on donne les points A, B et C d'affixes respectives i, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ + i ; on appelle I, J et K les milieux respectifs des segments [OB], [AC] et [BC] et s la similitude directe qui transforme A en I et O en B.

1. a) Déterminer le rapport et l'angle de s.
b) Donner l'écriture complexe de s.
c) En déduire l'affixe ω du centre Ω de s. Représenter Ω dans le plan P.
d) Quelle est l'image par s du rectangle AOBC ?

2. On considère la transformation $s^2 = s \circ s$.
a) Quelles sont les images des points O, B et A par s^2 ?
b) Montrer que s^2 est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
c) En déduire que les droites (OC), (BJ) et (AK) sont concourantes.

3. On définit la suite de points A_n de la façon suivante :
$A_0 = A$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = s(A_n)$.
a) Préciser les points A_1, A_2 et A_3 sur la figure du **1.** c).
b) On note u_n la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.
Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}.
Calculer u_0 et en déduire u_n en fonction de n.
Calculer $S_n = u_0 + ... + u_n$ en fonction de n.
Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers + ∞ ?

<u>EXERCICE N° 8 :</u>

Dans le plan orienté, ABC est un triangle rectangle en A, direct, non isocèle. H est le pied de la hauteur issue de A. Le point D est tel que ACD est un triangle rectangle en A, isocèle et direct. O est le pied de la hauteur issue de D dans le triangle DBC. K est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle DAO.

1. Faire une figure.

2. Montrer que la rotation r de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{2}$ transforme la droite (CB) en la droite (DO), puis le triangle AHC en le triangle AKD. En déduire que AHOK est un carré.

3. Montrer que les droites (AB) et (KH) sont sécantes. (On pourra montrer que l'hypothèse “ (AB) et (KH) parallèles ” conduit à l'égalité “ AO = AD ” et que ceci est contradictoire avec les hypothèses de l'énoncé).

4. En déduire qu'il existe une homothétie h qui transforme le triangle AKD en le triangle BHA.

5. On considère la transformation composée s = h o r.
a) Déterminer l'image des points H, C et A par s.
b) Identifier cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.