Lycée Farhat Hached Radès M^{me} BEN FREDJ Janvier 2011	Etudes De Fonctions	Classe: 4ème SI$_2$ NOM :………………… PRENOM :………………………

EXERCICE N° 1 :

1) x doit appartenir à l'intervalle [0 ;8]

2) Puisque Aire triangle=$\dfrac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$, l'aire du triangle BNM vaut $\dfrac{BM\times BN}{2}=\dfrac{x(8-x)}{2}$. L'aire du carré MNPQ s'obtient en soustrayant à l'aire du carré ABCD quatre fois l'aire du triangle BMN, soit $f(x)=8^2-4\times\dfrac{x(8-x)}{2}=64-16x+2x^2$

3) Il faut résoudre :

a) L'équation $f(x)=40 \Leftrightarrow 2x^2-16x+64=40 \Leftrightarrow 2x^2-16x+24=0 \Leftrightarrow x^2-8x+12=0$. Le calcul du discriminant fournira deux solutions réelles : $x=2$ et $x=6$

b) L'inéquation $f(x)\geq 50 \Leftrightarrow 2x^2-16x+64\geq 50 \Leftrightarrow 2x^2-16x+14\geq 0 \Leftrightarrow x^2-8x+7\geq 0$. Le calcul du discriminant de l'équation $x^2-8x+7=0$ fournira deux solutions réelles : $x=1$ et $x=7$, donc le signe du polynôme $P(x)=x^2-8x+7$:

x	0		1		7		8
$P(x)$		+	0	−	0	+	

On en déduit les solutions de l'inéquation :
$S=[0,1]\cup[7,8]$

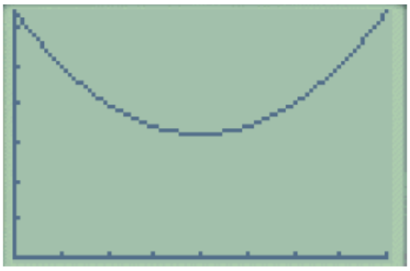
c) L'inéquation $f(x)\leq 34 \Leftrightarrow 2x^2-16x+64\leq 34 \Leftrightarrow 2x^2-16x+30\leq 0 \Leftrightarrow x^2-8x+15\leq 0$. Le calcul du discriminant de l'équation $x^2-8x+15=0$ fournira deux solutions réelles : $x=3$ et $x=5$, donc le signe du polynôme $Q(x)=x^2-8x+15$:

x	0		3		5		8
$Q(x)$		+	0	−	0	+	

On en déduit les solutions de l'inéquation :
$S=[3,5]$

4) Le polynôme $f(x)=2x^2-16x+64$ est de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=2, b=-16, c=64$. Puisque $a>0$, f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$, c'est-à-dire sur $]-\infty;4]$, et strictement croissante sur $[4;+\infty[$. f atteint donc son minimum pour $x=4$, lequel vaut $f(4)=2\times(4)^2-16\times4+64=32$. Le tableau de variations et la courbe de f sont :

x		4	
$f(x)=2x^2-16x+64$	↘	32	↗



EXERCICE N° 2 :

1) La division par 1-x implique $1-x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

2) On calcule, pour tout $h>0$,

$$\frac{f(1+h)+f(1-h)}{2}=\frac{\dfrac{(1+h)^2-7(1+h)+10}{2(1-(1+h))}+\dfrac{(1-h)^2-7(1-h)+10}{2(1-(1-h))}}{2}=\frac{\dfrac{h^2-5h+4}{-2h}+\dfrac{h^2+5h+4}{2h}}{2}$$

$$=\frac{\dfrac{2h\times(h^2-5h+4)-2h(h^2+5h+4)}{-4h^2}}{2}=\frac{\dfrac{-20h^2}{-4h^2}}{2}=\frac{5}{2}$$; c'est-à-dire $\dfrac{f(x_\Omega+h)+f(x_\Omega-h)}{2}=y_\Omega$.

Ceci prouve que le point $\Omega\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe

3) f est dérivable sur chacun des intervalles de D_f, en tant que quotient de fonctions qui le sont, et puisque f est de la forme $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$, où $u(x)=x^2-7x+10 \Rightarrow u'(x)=2x-7$ et $v(x)=2(1-x) \Rightarrow v'(x)=-2$, on en déduit que pour tout $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, $f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\frac{(2x-7)\times 2(1-x)-(x^2-7x+10)\times(-2)}{(2(1-x))^2}$

$$=\frac{4x-4x^2-14+14x+2x^2-14x+20}{4(1-x)^2}=\frac{-2x^2+4x+6}{4(1-x)^2}=\frac{2(-x^2+2x+3)}{4(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{2(1-x)^2}$$

4) Puisque pour tout $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, $2(1-x)^2>0$, $f'(x)$ sera du même signe que $P(x)=-x^2+2x+3$. Le calcul du discriminant de P donne $\Delta=(2)^2-4\times(-1)\times 3=16>0$ donc P admet deux racines réelles distinctes $\alpha=\frac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$ et $\beta=\frac{-2+\sqrt{16}}{-2}=-1$, d'où $P(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)=-(x+1)(x-3)$, d'où le tableau de signes de $P(x)$ donc de $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

On en déduit que f est strictement décroissante sur $x\in\left]-\infty;-1\right]$ et sur $\left[3;+\infty\right[$, et strictement croissante sur $\left[-1;1\right[$ et sur $\left]1;3\right]$. Elle atteint donc deux extremums locaux en $x=-1$ et $x=3$, qui valent respectivement $f(-1)=4,5$ et $f(3)=0,5$
Aux points d'abscisses –1 et 3, C admet une tangente horizontale.
La limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle étant celle du quotient simplifié de ses numérateur et dénominateur, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x}{2}=-\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{x}{2}=+\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to1} x^2-7x+10=4$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} 2(1-x)=0^-$ (car $x>1 \Leftrightarrow 1-x<0$), on en déduit, par quotient, que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=-\infty$. De même, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} 2(1-x)=0^+$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=+\infty$. La droite d'équation $x=1$ est donc asymptote verticale à la courbe C.

Résumons cela dans le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$4,5$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$0,5$	↘	$-\infty$

EXERCICE N° 3 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty$.

De plus, P est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$.
Les racines de P' sont donc 0 et 1, et la règle des signe d'un trinome du second degré nous permet d'écrire que :
Pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, $P'(x)>0$ et pour tout $x\in\left]0;1\right[$, $P'(x)<0$. On en conclut que $\boxed{P \text{ est strictement croissante sur } \left]-\infty;0\right], \text{ strictement décroissante sur } [0\,;1] \text{ et strictement croissante sur } \left[1;+\infty\right[}$
Puisque $P(0)=-1$ et $P(1)=-2$, le tableau de variations de P est donc :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

2) Sur $]-\infty;1]$, le maximum de la fonction P est atteint lorsque $x=0$ et vaut -1. Ainsi, pour tout $x \in]-\infty;1]$, $P(x) \leq -1$ (en particulier $\neq 0$)

P est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$. De plus $0 \in \left[P(1); \lim\limits_{x \to +\infty} P(x)\right[$. Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires affirme l'existence et l'unicité d'une solution $\alpha \in [1;+\infty[$ à l'équation $P(x)=0$

Puisque $P(2)=3>0$, on aura $P(1)<0<P(2) \Leftrightarrow P(1)<P(\alpha)<P(2) \Leftrightarrow \boxed{1<\alpha<2}$

3) Soit f la fonction définie $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$

a) Pour tout $x \neq -1$, on a $f'(x)=\dfrac{-1\times(1+x^3)-(1-x)\times 3x^2}{(1+x^3)^2}=\dfrac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2}\boxed{=\dfrac{P(x)}{(1+x^3)^2}}$

b) Puisque pour tout $x \neq -1$, $(1+x^3)^2>0$, $f'(x)$ est du même signe que $P(x)$.

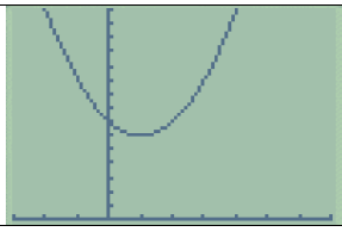
Ainsi : Pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]-1;\alpha[$, $f'(x)<0$, $f'(\alpha)=0$ et pour tout $x \in]\alpha;+\infty[$, $f'(x)>0$. On conclut que :

f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$, sur $]-1;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$

EXERCICE N° 4 :

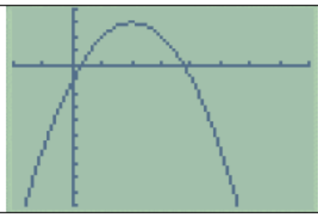
1) Le polynôme $f(x)=x^2-2x+7$ est de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=1, b=-2, c=7$. Puisque $a>0$, f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$, c'est-à-dire sur $]-\infty;1]$, et strictement croissante sur $[1;+\infty[$. f atteint donc son minimum pour $x=1$, lequel minimum vaut $f(1)=1^2-2\times1+7=6$. Le tableau de variations et la courbe de f sont :

x		1	
$f(x)=x^2-2x+7$	$\searrow$	6	$\nearrow$



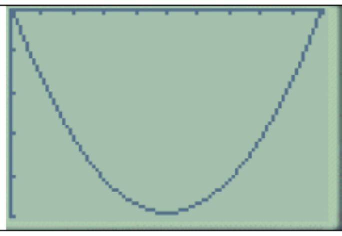
2) Le polynôme $f(x)=-x^2+4x-1$ est de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=-1, b=4, c=-1$. Puisque $a<0$, f est strictement croissante sur $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$, c'est-à-dire sur $]-\infty;2]$, et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$. f atteint donc son maximum pour $x=2$, lequel vaut $f(2)=-(2)^2+4\times(2)-1=3$. Le tableau de variations et la courbe de f sont :

x		2	
$f(x)=-x^2+4x-1$	$\nearrow$	3	$\searrow$



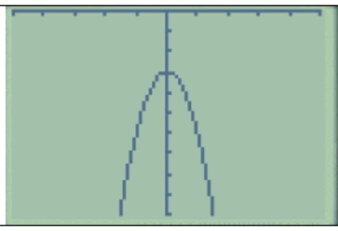
3) Le polynôme $f(x)=2x^2-20x+1$ est de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=2, b=-20, c=1$. Puisque $a>0$, f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$, c'est-à-dire sur $]-\infty;5]$, et strictement croissante sur $[5;+\infty[$. f atteint donc son minimum pour $x=5$, lequel vaut $f(5)=2\times5^2-20\times5+1=-49$. Le tableau de variations et la courbe de f sont :

x		5	
$f(x)=2x^2-20x+1$	$\searrow$	-49	$\nearrow$



4) Le polynôme $f(x)=-3x^2-3$ est de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=-3, b=0, c=-3$. Puisque $a<0$, f est strictement croissante sur $\left]-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$, c'est-à-dire sur $]-\infty;0]$, et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. f atteint donc son maximum pour $x=0$, lequel maximum vaut $f(0)=-3\times 0^2-3=-3$. Le tableau de variations et la courbe de f sont:

x		0	
$f(x)=-3x^2-3$	$\nearrow$	-3	$\searrow$



EXERCICE N° 5 :

1) a) La fonction g est dérivable sur]0 ;10] en tant que quotient de focntions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas sur]0 ;10], et pour tout $x\in]0;10]$,

$$g'(x)=\frac{(8x-36)(x-12)-(4x^2-36x)\times 1}{(x-12)^2}=\frac{8x^2-96x-36x+432-4x^2+36x}{(x-12)^2}$$

$$=\frac{4x^2-96x+432}{(x-12)^2}=\frac{4(x^2-24x+108)}{(x-12)^2}$$

On vérifie que pour tout $x\in]0;10]$, $\frac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}=\frac{4(x^2-18x-6x+108)}{(x-12)^2}=\frac{4(x^2-24x+108)}{(x-12)^2}=g'(x)$

D'où l'égalité $\boxed{g'(x)=\frac{4(x-6)(x-18)}{(x-12)^2}}$

b) Puisque pour tout $x\in]0;10]$, $(x-12)^2>0$, le signe de $g'(x)$ sera identique à celui de l'expression $4(x-6)(x-18)$, dont les racines sont 6 et 18

D'après la règle des signes d'un trinôme du second degré, on peut dresser le tableau de signes de $g'(x)$:

x	0		6		10
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit que $\boxed{\text{g est strictement croissante sur]0 ;6] et strictement décroissante sur [6 ;10]}}$

EXERCICE N° 6 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^2+1}{2x-1}$, pour tout $x\in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

« Résoudre l'équation $f(x)=x$ dans $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. On note par ϕ la racine de cette équation. »

Pour tout $x\in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f(x)=x \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{2x-1}=x \Leftrightarrow x^2+1=x(2x-1)\Leftrightarrow x^2+1=2x^2-x\Leftrightarrow x^2-x-1=0$

On calcule le discriminant de l'équation : $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-1)=5$

L'équation admet donc deux solutions réelles : $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Parmi ces deux solutions, une seule appartient à $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ (en effet $x_1<0$). Ainsi $\boxed{\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

« Déterminer le tableau de variations de *f*. »

La fonction *f* est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ en tant que fraction rationnelle définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, et pour tout $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, puisque $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=x^2+1\Rightarrow u'(x)=2x$ et $v(x)=2x-1\Rightarrow v'(x)=2$, on aura :

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\frac{2x(2x-1)-(x^2+1)\times 2}{(2x-1)^2}=\frac{4x^2-2x-2x^2-2}{(2x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2}=\frac{2(x^2-x-1)}{(2x-1)^2}$$

Puisque pour tout $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $(2x-1)^2>0$, le signe de $f'(x)$ sera identique à celui de x^2-x-1.

Dans la question précédente, nous avons déjà résolu l'équation $x^2-x-1=0$ (sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$).

Nous avons trouvé deux solutions réelles $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

D'après la règle du signe d'un trinôme, le signe de l'expression x^2-x-1 donc de $f'(x)$ est donné sur $\mathbb{R}$ par :

x	$-\infty$		$x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$x_2=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2-x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

En particulier, le signe de $f'(x)$ sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ est donc :

x	$\frac{1}{2}$		$x_2=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

On en déduit que : *f* est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2};\phi\right]$ et strictement croissante sur $[\phi;+\infty[$

« Démontrer que la droite (*D*) d'équation $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$, est asymptote à (*C*) en $+\infty$ »

Pour tout $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, on calcule la différence :

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=\frac{x^2+1}{2x-1}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\frac{x^2+1}{2x-1}-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{x^2+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{4}=\frac{4(x^2+1)}{4(2x-1)}-\frac{(2x-1)(2x-1)}{4(2x-1)}$$

$$=\frac{4x^2+4}{4(2x-1)}-\frac{4x^2-1}{4(2x-1)}=\frac{5}{4(2x-1)}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-1=+\infty$, en en conclut, par produit et quotient, que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{4(2x-1)}=0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=0$, ce qui prouve que la droite (*D*) d'équation $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$, est asymptote à (*C*) en $+\infty$

« Tracer la courbe (*C*) et la droite (*D*) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on prendra 2 cm pour unité). »

Afin de réaliser un tracé précis, on remarque que :

$\lim\limits_{x\underset{>}{\to}\frac{1}{2}}=2x-1=0^+$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}x^2+1=\frac{5}{4}$, donc par quotient $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}\frac{1}{2}}f(x)=+\infty$, ce qui prouve que la droite d'équation

$x=\dfrac{1}{2}$ est asymptote verticale à la courbe (C).

f atteint son minimum lorsque $x=\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1,6$.

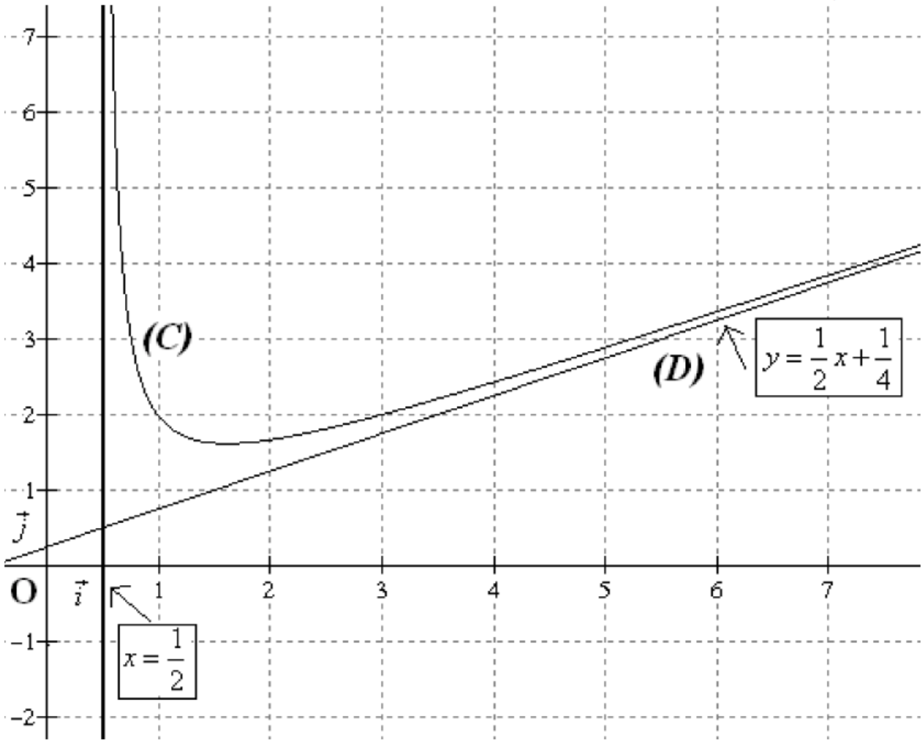
Elle y croise alors la droite d'équation $y=x$, c'est-à-dire que : $f(\phi)=\phi$

Le calcul de quelques valeurs remarquables fournit :

x	1	2	3	4
$f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x-1}$	$f(1)=\dfrac{1^2+1}{2\times 1-1}=2$	$f(2)=\dfrac{2^2+1}{2\times 2-1}=\dfrac{5}{3}$	$f(3)=\dfrac{3^2+1}{2\times 3-1}=\dfrac{10}{5}=2$	$f(4)=\dfrac{4^2+1}{2\times 4-1}=\dfrac{17}{7}\approx 2,4$

Enfin, on trace l'asymptote oblique (D) d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$

Le tracé de la courbe (C) et la droite (D) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ donne donc :



EXERCICE N° 7 :

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+3>0$ (donc $\neq 0$), donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=\boxed{-\infty}$ et de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=\boxed{+\infty}$

3) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $ax+b+\dfrac{c}{x^2+3}=\dfrac{(ax+b)(x^2+3)+c}{x^2+3}=\dfrac{ax^3+3ax+bx^2+3b+c}{x^2+3}=\dfrac{ax^3+bx^2+3ax+3b+c}{x^2+3}$.

Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x^2+3}$ si et seulement si $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ 3a=3\Leftrightarrow a=1 \\ 3b+c=5\Leftrightarrow c=8 \end{cases}$ (par identification).

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{f(x)=x-1+\dfrac{8}{x^2+3}}$

4) Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{8}{x^2+3}=0$, la courbe C_f admet la droite d d'équation $y=x-1$ pour **asymptote oblique** en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus, puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)-(x-1)=\dfrac{8}{x^2+3}>0 \Leftrightarrow f(x)>x-1$,

la courbe C_f sera strictement au dessus de la droite d sur $\mathbb{R}$

5) Puisque $f(-1)=0$, -1 est une solution de l'équation $f(x)=0$.
Pourquoi est-elle unique ? Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on peut écrire :
Pour tout $x<-1$, $f(x)<f(-1)$, c'est-à-dire $f(x)<0$ (et donc $\neq 0$)
De même : Pour tout $x>-1$, $f(x)>f(-1)$, c'est-à-dire $f(x)>0$ (et donc $\neq 0$)
Ainsi, pour $x\neq -1$, $f(x)\neq 0$

6) Dans la question précédente, on vient de montrer que :

Pour tout $x\in\left]-\infty;-1\right[$, $f(x)<0$
$f(-1)=0$
Pour tout $x\in\left]-1;+\infty\right[$, $f(x)>0$

Ceci se résume dans le tableau :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

7) Sur l'intervalle $\left]-\infty;+\infty\right[$, f est continue en tant ue fraction rationnelle définie sur $\left]-\infty;+\infty\right[$, et strictement croissante sur $\left]-\infty;+\infty\right[$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ de sorte que $2\in\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$. Le **corollaire du théorème des Valeurs Intermédiaires** affirme l'existence d'une unique solution α pour l'équation $f(x)=0$

8) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on calcule séparément : $\dfrac{(x-1)^3}{x^2+3}=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+3}$,

et $f(x)-2=\dfrac{x^3-x^2+3x+5}{x^2+3}-\dfrac{2(x^2+3)}{x^2+3}=\dfrac{x^3-x^2+3x+5-2x^2-6}{x^2+3}=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+3}$, pour conclure à l'égalité $\boxed{f(x)-2=\dfrac{(x-1)^3}{x^2+3}}$.

9) Pour $x=1$, on obtient donc $f(1)-2=\dfrac{(1-1)^3}{1^2+3}=0$, donc la solution de l'équation $f(x)=2$ est : 1

De plus : Pour $x<1$, $x-1<0$ donc $\dfrac{(x-1)^3}{x^2+3}<0$, c'est-à-dire $f(x)-2<0\Leftrightarrow f(x)<2$, et inversément, pour $x>1$, $x-1>0$ donc $\dfrac{(x-1)^3}{x^2+3}>0$, c'est-à-dire $f(x)-2>0\Leftrightarrow f(x)>2$. On en déduit ainsi que :

C_f est strictement en dessous de Δ sur $\left]-\infty;1\right[$ et strictement au dessus sur $\left]1;+\infty\right[$.