Lycée Farhat Hached Radès M[me] BEN FREDJ Octobre 2010	Séries n°2 Parties Entières Correction	Classe: 4[ème] M_4 NOM :………………… PRENOM :………………………

EXERCICE N° 1 :

$E(x)=0 \Leftrightarrow x\in[0;1[$. $\boxed{S=[0;1[}$

$E(x)=4 \Leftrightarrow x\in[4;5[$. $\boxed{S=[4;5[}$

$E(x)=-3 \Leftrightarrow x\in[-3;-2[$. $\boxed{S=[-3;-2[}$

EXERCICE N° 2 :

D'après la définition de la partie entière d'un réel x, on a $E(x)\le x<E(x)+1$

L'inégalité de droite $x<E(x)+1$ fournit $x-1<E(x)$. Quant à l'inégalité $E(x)\le x$, elle est donnée par la définition même !

EXERCICE N° 3 :

1) Puisque $x\to+\infty$, on peut considérer que $x>0$.

Pour tout $x>0$, on a $x-1<E(x)\le x$, puis par division par x, $\frac{x-1}{x}<\frac{E(x)}{x}\le\frac{x}{x}$, c'est-à-dire $1-\frac{1}{x}<\frac{E(x)}{x}\le 1$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1$, le théorème des Gendarmes nous permet de conclure que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{E(x)}{x}=1}$

2) <u>1[ère] méthode :</u>

On applique, pour $u\ne0$, l'encadrement $u-1<E(u)\le u$ à $u=\frac{1}{x}$. On obtient $\frac{1}{x}-1<E\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{x}$

Deux cas sont à distinguer.

Si $x>0$, on a alors $x\left(\frac{1}{x}-1\right)<xE\left(\frac{1}{x}\right)\le x\times\frac{1}{x}$ c'est-à-dire $1-x<xE\left(\frac{1}{x}\right)\le 1$

Si $x<0$, on a alors $x\left(\frac{1}{x}-1\right)>xE\left(\frac{1}{x}\right)\ge x\times\frac{1}{x}$ c'est-à-dire $1-x>xE\left(\frac{1}{x}\right)\ge 1$, ou encore $1\le xE\left(\frac{1}{x}\right)<1-x$

Dans les deux cas, puisque $\lim\limits_{x\to0}1-x=1$, le théorème des Gendarmes nous permet de conclure que $\boxed{\lim\limits_{x\to0}xE\left(\frac{1}{x}\right)=1}$

<u>2[ème] méthode (ou plutôt « 2[ème] rédaction »)</u>

On utilise le résultat de la question 1) : $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{E(u)}{u}=1$, que l'on réécrit $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{u}E(u)=1$ et on pose $u=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{u}$. Alors $\lim\limits_{u\to+\infty}x=0^+$ et la limite $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{u}E(u)=1$ se réécrit $\lim\limits_{x\to0^+}xE\left(\frac{1}{x}\right)=1$

Pour la limite lorsque $x\to0^-$, il faut établir $\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{E(u)}{u}=1$ d'une façon identique à l'exercice n°1

EXERCICE N° 4 :

La fonction f sera définie pour toutes les valeurs de x telles que $E(x)-x\ne0\Leftrightarrow E(x)\ne x$

Or $E(x)=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$

EXERCICE N° 5 :

1) Pour tout réel x, on écrit les deux encadrements :

$x+1-1<E(x+1)\le x+1\Leftrightarrow\boxed{x<E(x+1)\le x+1}$

et $x-1<E(x)\le x$. On multiplie ce dernier par -1. On obtient $-x+1>-E(x)\ge -x$, que l'on réécrit $\boxed{-x\le -E(x)<-x+1}$

En additionnant les deux encadrés, on obtient $x-x<E(x+1)-E(x)<x+1-x+1\Leftrightarrow\boxed{0<E(x+1)-E(x)<2}$

(Il est très important de noter ici le rôle des inégalités **strictes**)

Le nombre $E(x+1)-E(x)$ est donc un entier (somme de deux entiers) strictement compris entre 0 et 2. Il ne peut s'agir que de 1, et ainsi $E(x+1)-E(x)=1 \Leftrightarrow \boxed{E(x+1)=E(x)+1}$

2) On procède par récurrence sur n

Notons $P(n)$ la propriété « $E(x+n)=E(x)+n$

La propriété est trivialement vraie pour n=0 et vraie pour n=1, comme nous l'avons montré question 1)

Supposons que pour un entier n quelconque, la propriété $P(n)$ soit vraie, à savoir $E(x+n)=E(x)+n$

On écrit alors successivement :

$E(x+n+1)$

$= E \quad x+n \quad +1$ $\qquad\qquad\qquad n$

$= E \quad x \quad +n+1$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

On aboutit ainsi à la propriété $P(n+1)$

Puisque $P(1)$ est vraie et puisque $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, on en conclut que le propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier n, c'est-à-dire : Pour tout réel x et tout entier n, $E(x+n)=E(x)+n$

EXERCICE N° 6 :

On utilise le résultat de l'exercice n°5, stipulant que pour tout réel x, on a $E(x+1)=E(x)+1$

On a alors, pour tout réel x,

$f(x+1)=E(x+1)+\left(x+1-E(x+1)\right)^2$

$=E(x)+1+\left(x+1-\left(E(x)+1\right)\right)^2$

$=E(x)+1+\left(x-E(x)\right)^2$

$=E(x)+1+x^2-2xE(x)+\left(E(x)\right)^2$

D'autre part,

$f(x)+1=E(x)+\left(x-E(x)\right)^2+1$

$=E(x)+x^2-2xE(x)+\left(E(x)\right)^2+1$

Les deux expressions étant totalement identiques, on en conclut que, pour tout réel x, $\boxed{f(x+1)=f(x)+1}$

EXERCICE N° 7 :

Soit x un nombre réel.

Il faut alors distinguer deux cas :

$\boxed{\text{Si } x\in\mathbb{Z}\text{, alors } E(-x)=-E(x)}$

Si $x\notin\mathbb{Z}$, alors $E(x)$ vérifie l'encadrement **strict** $x-1<E(x)<x$, tandis que $E(-x)$ vérifie l'encadrement **strict** $-x-1<E(-x)<-x$. En additionnant les deux encadrements, on obtient $-2<E(x)+E(-x)<0$

(Il est très important de noter ici le rôle des inégalités **strictes**)

Le seul nombre entier strictement compris entre –2 et 0 est –1, de sorte que :

$\boxed{\text{Si } x\notin\mathbb{Z}\text{, alors } E(-x)=-E(x)-1}$

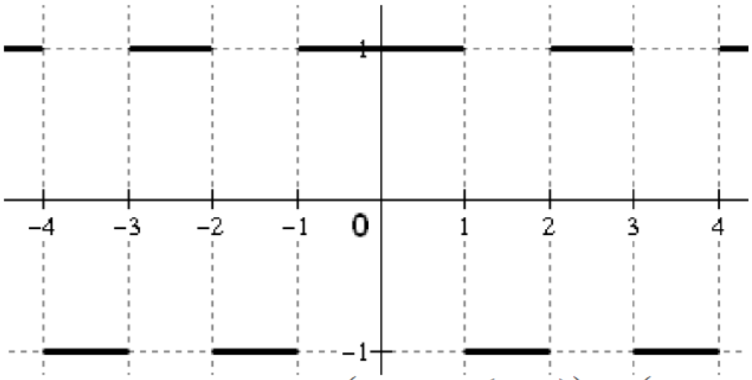
EXERCICE N° 8 :

1) Pour définir la fonction $f: x \mapsto (-1)^{E(x)}$, on doit diviser $\mathbb{R}$ en intervalles d'amplitude 1, de la forme $[m;m+1[$, suivant la parité de m. Plus précisément :

Pour tout $x\in[2k;2k+1[$, $k\in\mathbb{Z}$, $E(x)=2k$ donc $(-1)^{E(x)}=(-1)^{2k}=1$

Pour tout $x\in[2k+1;2k+2[$, $k\in\mathbb{Z}$, $E(x)=2k+1$ donc $(-1)^{E(x)}=(-1)^{2k+1}=-1$

La représentation graphique de f est donc constituée de segments de droites, de longueur 1, et de « hauteur » alternativement égale à 1 (cas d'un intervalle $[m;m+1[$, m pair) ou à -1 (cas d'un intervalle $[m;m+1[$, m impair)
On obtient :



2) a) Pour tout réel x, $h(x+2)=E\left(x+2-2E\left(\frac{x+2}{2}\right)\right)=E\left(x+2-2E\left(\frac{x}{2}+1\right)\right)$

On utilise le résultat de l'exercice n°5, stipulant que pour tout réel u, on a $E(u+1)=E(u)+1$

Ainsi $E\left(\frac{x}{2}+1\right)=E\left(\frac{x}{2}\right)+1$, et on en déduit que :

$h(x+2)=E\left(x+2-2\left(E\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right)=E\left(x+2-2E\left(\frac{x}{2}\right)-2\right)=E\left(x-2E\left(\frac{x}{2}\right)\right)=h(x)$

La fonction h est donc périodique de période 2

b) Pour tout $x\in[0;2[$, $0\leq x<2 \Leftrightarrow 0\leq\frac{x}{2}<1$ donc $E\left(\frac{x}{2}\right)=0$, et l'expression de h est donc $h(x)=E(x-2\times 0)=E(x)$.

On retombe sur la partie entière, bien connue.

<u>EXERCICE N° 9 :</u>

1) On utilise le résultat de l'exercice n°5, stipulant que pour tout réel x, on a $E(x+1)=E(x)+1$

On a alors, pour tout réel x, $m(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-(E(x)+1)=x-E(x)=m(x)$, ce qui prouve que la fonction m est périodique de période 1

2) Pour tout $x\in[0;1[$, $E(x)=0$ donc $m(x)=x$

La représentation graphique de m est donc constitué du segment de droite correspondant à la fonction identité $x\to x$ sur [0 ;1[, complété par des translations successives de vecteur $\vec{i}$ et $-\vec{i}$

On obtient :