Lycée Farhat Hached Radès M^{me} BEN FREDJ DECEMBRE 2009	SERIE 5 SUITES ARITHMETIQUES	Classe: $2^{ème}$ S_1 NOM :.................... PRENOM :......................

EXERCICE N° 1 :

1) Si $u_0 = 2$ et $r = -3$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r = 2 - 3n$, ce qui nous permet de calculer $u_{10} = -28$, $u_{20} = -58$ et $u_{100} = -298$.

2) On calcule $r = u_1 - u_0 = 5 - 2 = 3$, donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r = 2 + 3n$ ce qui nous permet de calculer $u_2 = 8$ et $u_5 = 17$

3) Puisque $u_2 = u_0 + 2 \times r$, on en déduit que $r = \frac{1}{2}(u_2 - u_0) = 4$, et ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r = 2 + 4n$ ce qui nous permet de calculer $u_1 = 6$ et $u_5 = 22$

4) Puisque $u_{10} = u_1 + 9 \times r$, on en déduit que $r = \frac{1}{9}(u_{10} - u_1) = 2$, et ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1) \times r = 10 + 2(n-1) = 2n + 8$ ce qui nous permet de calculer $u_0 = 8$ et $u_5 = 18$

5) Puisque $u_{10} = u_5 + 5 \times r$, on en déduit que $r = \frac{1}{5}(u_{10} - u_5) = -1$, et ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_5 + (n-5) \times r = 17 - (n-5) = 22 - n$ ce qui nous permet de calculer $u_0 = 22$ et $u_1 = 21$

6) Puisque $u_{51} = u_{20} + (51 - 20) \times r$, on en déduit que $r = \frac{1}{31}(u_{51} - u_{20}) = \frac{1}{31}(-145 + 52) = -3$, et ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{20} + (n - 20) \times r = -52 + (-3)(n-20) = -3n + 8$

7) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{22} + (n - 22) \times r = 15 + \frac{3}{4}(n - 22) = \frac{3}{4}n - \frac{3}{2}$

8) Puisque $u_{20} = u_{10} + (20 - 10) \times r$, on en déduit que $10r = 25 \Leftrightarrow r = 2{,}5$, et ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r = 3 + 2{,}5n$

9) Puisque la suite u est arithmétique de raison r, $u_2 + u_3 + u_4 = u_2 + u_2 + r + u_2 + 2r = 3u_2 + 3r$, et $u_6 = u_2 + 4r$. Le système $\begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = 15 \Leftrightarrow u_2 + r = \frac{15}{3} = 5 \\ u_6 = 60 \Leftrightarrow u_2 + 4r = 20 \end{cases}$ a pour solution $\begin{cases} u_2 = 0 \\ r = 5 \end{cases}$. Puisque pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + (n-2) \times r = 0 + 5(n-2) = 5n - 10$, on en déduit $u_0 - 10$

EXERCICE N° 2 :

Notons (r_n) la suite des rayons des cercles. (r_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme égal à $r_1 = 1$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $r_n = 1 + \frac{1}{2}(n-1)$. Les aires des demi disques sont donc égales à :

$$A_n = \frac{1}{2}\pi\,(r_n)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(1 + \frac{1}{2}(n-1)\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)^2$$

Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = A_n - A_{n-1} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{2}\pi\left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}n\right)\right]\left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}n\right)\right] = \frac{1}{4}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $\boxed{u_n = \frac{1}{4}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)}$

Pour montrer que la suite (u_n) des aires est arithmétique, on calcule la différence enter deux termes consécutifs : Pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}\pi\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\pi$. La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $\boxed{\frac{1}{4}}$

EXERCICE N° 3 :

Les nombres impairs sont les termes de la suite arithmétique de raison 2, et de premier $u_0 = 1$. Ainsi ils sont de la forme $u_n = 2n+1$. On cherche à dénombrer les nombres impairs tels que $179 \le u_n \le 1243 \Leftrightarrow 179 \le 2n+1 \le 1243$,
$\Leftrightarrow \frac{179-1}{2} \le n \le \frac{1243-1}{2}$, c'est-à-dire correspondant à $89 \le n \le 621$. Il y a $621-89+1=533$ entiers n tels que $89 \le n \le 621$, donc il y a 533 nombres impairs entre 179 et 1243

Les nombres pairs étant les termes de la suite arithmétique de raison 2, et de premier $v_0 = 1$. Ainsi ils sont de la forme $v_n = 2n$. On cherche donc les entiers tels que $179 \le 2n \le 1243 \Leftrightarrow \frac{179}{2} \le n \le \frac{1243}{2}$. Comme $n \in \mathbb{N}$, $90 \le n \le 621$. Il y a 621-90+1=532 nombres impairs entre 179 et 1243.

EXERCICE N° 4 :

1) Si on note (u_n) la suite arithmétique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $\frac{1}{3}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}n$.

Résolvons $u_n = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{2}{3}n = 7 \Leftrightarrow n = 10$. Ainsi 7 correspond à u_{10}, et la somme $S_1 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + ... + \frac{19}{3} + 7$ correspond à la somme $S_1 = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$ des 11 premiers termes de (u_n). Ainsi

$$\boxed{S_1 = \underbrace{11}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{de termes}}} \times \frac{\overbrace{u_0}^{\substack{\text{premier}\\ \text{terme}}} + \overbrace{u_{10}}^{\substack{\text{dernier}\\ \text{terme}}}}{2} = 11 \times \frac{\frac{1}{3}+7}{2} = \frac{121}{3}}$$

2) Si on note (u_n) la suite arithmétique de raison -3 et de premier terme 5, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5-3n$. Résolvons $u_n = -34 \Leftrightarrow 5-3n = -34 \Leftrightarrow n = 13$. Ainsi -34 correspond à u_{13}, et la somme S_2 = 5+2-1-4-7…-34 correspond à la somme $S_2 = u_0 + u_1 + ... + u_{13}$ des 14 premiers termes de (u_n). Ainsi

$$\boxed{S_2 = \underbrace{14}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{de termes}}} \times \frac{\overbrace{u_0}^{\substack{\text{premier}\\ \text{terme}}} + \overbrace{u_{10}}^{\substack{\text{dernier}\\ \text{terme}}}}{2} = 14 \times \frac{5-34}{2} = -203}$$

3) Les multiples de 7 sont les termes de la suite arithmétique de raison 7, et de premier $u_0 = 0$. Ainsi ils sont de la forme $u_n = 7n$. On cherche à dénombrer les termes de la suite tels que $100 \le u_n \le 1000 \Leftrightarrow \frac{100}{7} \le n \le \frac{1000}{7}$,. Comme $n \in \mathbb{N}$, $15 \le n \le 142$. Il y a 142-15+1=128 multiples de 7 entre 100 et 1000.

La somme de ces 128 multiples est donc égale à $\boxed{\underbrace{128}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{de termes}}} \times \frac{\overbrace{u_{15}}^{\substack{\text{premier}\\ \text{terme}}} + \overbrace{u_{142}}^{\substack{\text{dernier}\\ \text{terme}}}}{2} = 128 \times \frac{105+994}{2} = 70336}$

Si on note (u_n) la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1+(n-1) = n$, et ainsi la somme $S_n = 1+2+3+4+....+n$ est
celle des n premiers termes de la suite (u_n)

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \underbrace{n}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{de termes}}} \times \frac{\overbrace{1}^{\substack{\text{premier}\\ \text{terme}}} + \overbrace{n}^{\substack{\text{dernier}\\ \text{terme}}}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

EXERCICE N° 5 :

Puisque 3475621-2364510=111111 et 4586732-3475621,=111111, ces nombres sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 111111

EXERCICE N° 6 :

1.a :

$$\begin{aligned} U_{24} &= U_0 + n \times r \\ &= 2 + 24 \times 3,5 \\ U_{24} &= 86 \end{aligned}$$