Lycée Farhat Hached Radès M^me BEN FREDJ Le 07 Octobre 2011	Série suites	Classe: 4ème M_4 NOM :………………… PRENOM :………………………

SUITES SE RAMENANT AUX SUITES ARITHMETIQUES OU GEOMETRIQUES -

EXERCICE N° 1 :

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

2) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

EXERCICE N° 2 :

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2} \end{cases}$.

On pose $v_n = u_n^2$

1) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

2) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

EXERCICE N° 3 :

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier *n* par $u_n = 2n - 1$.

a) Montrez que (u_n) est une suite arithmétique dont vous préciserez le premier terme u_0 et la raison *r*

b) Calculez en fonction de *n* la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_n = 2^{u_n}$

a) Montrez que (v_n) est une suite géométrique pour laquelle vous préciserez le premier terme v_0 et la raison *q*

b) Calculez $P_n = v_0 \times v_1 \times ..... \times v_n$ en fonction de *n*.

EXERCICE N° 4 :

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n}{n}$

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

2) Exprimer v_n en fonction de *n*.

3) En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

EXERCICE N° 5 :

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 10u_n - 9u_{n-1} \end{cases}$.

On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

2) Exprimer v_n en fonction de *n*.

3) Démontrer que pour tout entier *n*, $u_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... v_{n-1} + u_0$

4) En déduire une expression de u_n en fonction de *n*.

EXERCICE N° 6 :

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \end{cases}$.

1) On pose $s_n = u_{n+1} + u_n$. Montrer que (s_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de s_n en fonction de n.

2) On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et $t_n = v_{n+1} - v_n$. Exprimer t_n en fonction de s_n.

3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. (indication : calculer $t_0 + t_1 + ...t_{n-1}$ de deux façons).

LIMITES DE SUITES

EXERCICE N° 7 :

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1) a) Montrer que (u_n) est majorée par 4.

b) Montrer que (u_n) est strictement croissante

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

b) Retrouver le résultat du 1.c)

c) Etudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2(4 - u_n)$

EXERCICE N° 8 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Pour quelle valeur de u_0 la suite est-elle stationnaire ?

2) On pose $u_0 = 1$.

a) Démontrer les relations suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{3}\right)^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n + \sqrt{3}\right)^2$

b) Démontrer que $(u_n)_n$ est une suite strictement décroissante pour $n \geq 1$

c) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_{n+1} en fonction de v_1 et de n.

b) Calculer la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et retrouver la limite de $(u_n)_n$

SUITES ADJACENTES

EXERCICE N° 09 :

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

1) On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$

a) Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison

b) Déterminer la limite de la suite w

2) a) Montrer que la suite u est croissante

b) Montrer que la suite v est décroissante

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

3) Montrer que les deux suites u et v convergent et ont la même limite que l'on appellera l

4) On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = 3u_n + 8v_n$

a) Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante

b) Déterminer alors la valeur de l

EXERCICE N° 10 :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1; v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}; v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = v_n - u_n$

Démontrez que la suite d est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. En déduire une expression de d en fonction de n.

2) Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \sum_{p=0}^{n}(v_p - u_p) = (v_0 - u_0) + (v_1 - u_1) + ... + (v_n - u_n)$

a) Donner l'expression de w_n en fonction de n.

b) Exprimer $\sum_{p=0}^{n-1}(u_{p+1} - u_p)$ en fonction de w_n, puis en fonction de u_n et de u_0.

En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Quelle est la limite de (u_n) ?

EXERCICE N° 11 :

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$; $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2}$

1) Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

2) Soit la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $w_n = v_n - u_n$

a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3) Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4) On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$

a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).