Lycée Farhat Hached Radès M^{me} BEN FREDJ Février 2010	SERIE 6 SUITES GEOMETRIQUES	Classe: $2^{ème}$ S_1 NOM :..................... PRENOM :......................

EXERCICE N° 1 :

1) Les différences 8-(-5)=13 et 21-8=13 étant égales, ces nombres sont les trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3

Comme les quotients $\frac{8}{-5}$ et $\frac{21}{8}$ sont différents, ces nombres ne sont pas les termes consécutifs d'une suite géométrique.

2) Les différences 10-(-5)=15 et -20-10=-30 n'étant pas égales, ces nombres ne sont pas les termes consécutifs d'une suite arithmétique

En revanche, les quotients $\frac{10}{-5} = -2$ et $\frac{-20}{10} = -2$ étant égaux, ces nombres sont les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison -2

EXERCICE N° 2 :

Les quotients $\frac{3434}{346834} = \frac{1}{101}$ et $\frac{34}{3434} = \frac{1}{101}$ étant égaux, ces nombres sont les trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{101}$

EXERCICE N° 3 :

La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ n'est pas géométrique, car le calcul de $u_1 = u_0^2 = 7^2 = 49$ et de $u_2 = u_1^2 = 49^2 = 2401$ montrent que $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$

La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{6}{100}u_n \end{cases}$ se réécrit $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = 1{,}06u_n \end{cases}$, donc est une suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme 100

EXERCICE N° 4 :

1) Si $u_0 = 32$ et $r = \frac{1}{4}$, on calcule $u_2 = u_0 \times r^2 = 32 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2$, puis $\boxed{u_3 = u_2 \times r = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}}$, $\boxed{u_5 = u_3 \times r^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{32}}$ et $u_8 = u_5 \times r^3 = \frac{1}{32} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{2048}$

2) Puisque $u_1 = u_0 \times r$, on déduit $u_0 = \frac{u_1}{r} = \frac{1/125}{5} = \frac{1}{625}$, et à partir de la formule $u_n = u_0 \times r^n = \frac{5^n}{625}$, on déduit $\boxed{u_5 = 5}$, $\boxed{u_7 = 125}$ et $\boxed{u_{20} = \frac{5^{20}}{725} = \frac{5^{20}}{5^4} = 5^{16}}$

3) Puisque $u_1 = u_0 \times r$, on déduit $r = \frac{u_1}{u_0} = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3}$, et à partir de la formule $u_n = u_0 \times r^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, on déduit successivement $\boxed{u_2 = \frac{1}{9}}$ et $\boxed{u_5 = \frac{1}{243}}$

4) Puisque $u_2 = u_0 \times r^2$, on déduit $r^2 = \frac{u_2}{u_0} = \frac{12}{3} = 4$, ce qui nous fournit deux solutions : $r = 2$ ou $r = -2$. Si $r = 2$, à partir de la formule $u_n = u_0 \times r^n = 3 \times 2^n$, on déduit successivement $\boxed{u_1 = 6}$ et $\boxed{u_5 = 96}$. Si $r = -2$, à partir de la formule $u_n = u_0 \times r^n = 3 \times (-2)^n$, on déduit successivement $\boxed{u_1 = -6}$ et $\boxed{u_5 = -96}$

5) Puisque $u_{10} = u_1 \times r^9$, on déduit $r^9 = \frac{u_{10}}{u_1} = \frac{1}{-1} = -1$, ce qui nous fournit : $r = -1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times r^{n-1} = (-1) \times (-1)^{n-1} = (-1)^n$. On en déduit successivement $\boxed{u_0 = 1}$ et $\boxed{u_5 = -1}$

EXERCICE N° 5 :

1) On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-4)^{2(n+1)+1}}{(-4)^{2n+1}} = \frac{(-4)^{2n+3}}{(-4)^{2n+1}} = (-4)^{2n+3-(2n+1)} = (-4)^2 = 16$, ce qui prouve que la suite (u_n) est géométrique de raison 16, et de premier terme $u_0 = (-4)^{2\times 0+1} = -4$

2) On calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1}\times\frac{1}{3^{(n+1)+1}}}{2^n\times\frac{1}{3^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\times\frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3}$, ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$, et de premier terme $v_0 = 2^0\times\frac{1}{3^{0+1}} = \frac{1}{3}$

3) On calcule : $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(-1)^{n+1}\times 2^{3(n+1)+1}}{(-1)^n\times 2^{3n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}\times 2^{3n+4}}{(-1)^n\times 2^{3n+1}} = (-1)^{n+1-n}\times 2^{3n+4-(3n+1)} = -2^3 = -8$, ce qui prouve que la suite (w_n) est géométrique de raison -8, et de premier terme $w_0 = (-1)^0\times 2^{3\times 0+1} = 2$

EXERCICE N° 6 :

1) Si on note (u_n) la suite géométrique de raison q=3 et de premier terme $u_0 = 18$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = 18\times 3^n$.
Résolvons $u_n = 39366 \Leftrightarrow 18\times 3^n = 39366 \Leftrightarrow n = 7$. Ainsi 39366 correspond à u_7, et la somme $18+54+162+.....+39366$ correspond à la somme $u_0+u_1+....+u_7$ des 8 premiers termes de (u_n). Ainsi

$$\underbrace{u_0}_{\text{premier terme}}\times\frac{1-\left(\overbrace{q}^{\text{raison}}\right)^{\text{nombre de termes}}}{1-\underbrace{q}_{\text{raison}}} = 18\times\frac{1-3^8}{1-3} = 59040$$

2) Si on note (u_n) la suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{8}$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{8}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Résolvons $u_n = -\frac{1}{1048576} \Leftrightarrow \frac{1}{8}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{1048576} \Leftrightarrow n = 17$. Ainsi $-\frac{1}{1048576}$ correspond à u_{17}, et la somme $\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+......-\frac{1}{1048576}$ correspond à la somme $u_0+u_1+....+u_{17}$ des 18 premiers termes de (u_n). Ainsi

$$\underbrace{u_0}_{\text{premier terme}}\times\frac{1-\left(\overbrace{q}^{\text{raison}}\right)^{\text{nombre de termes}}}{1-\underbrace{q}_{\text{raison}}} = \frac{1}{8}\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{18}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{12}\left[1-\frac{1}{2}^{18}\right]$$

3) Si on note (u_n) la suite géométrique de raison $q = -\sqrt{2}$ et de premier terme $u_0 = \sqrt{2}$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2}\times\left(-\sqrt{2}\right)^n$.

Résolvons $u_n = -128 \Leftrightarrow \sqrt{2}\times\left(-\sqrt{2}\right)^n = -128 \Leftrightarrow n = 13$. Ainsi -128 correspond à u_{13}, et la somme $\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}-4+4\sqrt{2}....-64+64\sqrt{2}-128$ correspond à la somme $u_0+u_1+....+u_{13}$ des 14 premiers termes de (u_n). Ainsi

$$\underbrace{u_0}_{\text{premier terme}}\times\frac{1-\left(\overbrace{q}^{\text{raison}}\right)^{\text{nombre de termes}}}{1-\underbrace{q}_{\text{raison}}} = \sqrt{2}\times\frac{1-\left(-\sqrt{2}\right)^{14}}{1-\left(-\sqrt{2}\right)} = -\frac{127\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

4) Si on note (u_n) la suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $u_0=1$, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=1\times(2)^n=2^n$.

La somme $2^7+2^8+2^9+....+2^{21}$ correspond donc à $u_7+u_8+....+u_{21}$ de 21-7+1=15 termes consécutifs de (u_n).

Ainsi $$\underbrace{u_7}_{\text{premier terme}}\times\frac{1-\Big(\overbrace{q}^{\text{raison}}\Big)^{\text{nombre de termes}}}{1-\underbrace{q}_{\text{raison}}}=2^7\times\frac{1-(2)^{15}}{1-(2)}=2^7\left(2^{15}-1\right)$$

5) Si on note (u_n) la suite géométrique de raison $q=-x$ et de premier terme, la somme $-x+x^2-x^3+x^4....-x^{17}$ correspond à la somme $u_0+u_1+....+u_{16}$ des 17 premiers termes de (u_n).

Ainsi $$\underbrace{u_0}_{\text{premier terme}}\times\frac{1-\Big(\overbrace{q}^{\text{raison}}\Big)^{\text{nombre de termes}}}{1-\underbrace{q}_{\text{raison}}}=(-x)\times\frac{1-(-x)^{17}}{1-(-x)}=(-x)\times\frac{1+x^{17}}{1+x}$$